Soluzioni del Tutorato di Statistica 1 del 29/04/2010
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.

$X_1, ..., X_n$ è un campione casuale da $N(\theta, \theta)$, $\theta > 0$

Se considero μ la quantità pivotale è: $Q = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

quindi $\gamma = P(-t_{(1+\gamma)/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{(1+\gamma)/2}) =$
$P(-t_{(1+\gamma)/2}S/\sqrt{n}) \leq \bar{X} - \theta \leq t_{(1+\gamma)/2}S/\sqrt{n}) =$
$P(\bar{X} - t_{(1+\gamma)/2}S/\sqrt{n} < \theta < \bar{X} + t_{(1+\gamma)/2}S/\sqrt{n})$
Se invece consideravo σ^2 la quantità pivotale da considerare era
$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
quindi $1 - \alpha = P(\chi_{\alpha/2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{(1-\alpha)/2}) =$
$P(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{(1-\alpha)/2}} \leq \theta \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}})$

Esercizio 2.

Sono stati eseguiti 400 lanci di una moneta e il numero delle teste T ottenute è 175.
Sia X v.a. tc.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se} T \\ 0 & \text{se} C \end{cases}$$

$P(X = 1) = p$; $\hat{p} = 175/400 = \frac{1}{400}\sum_{i=1}^{10} x_i$.
$0,90 = P(-q_1 \leq \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq q_1) \simeq P(-1,645\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq \bar{X}_n - p \leq 1,645\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}) =$
avendo usato l'approssimazione per grandi campioni poichè n grande.
$= P(\bar{X}_n - 1,645\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \bar{X}_n + 1,645\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$
Dunque l'intervallo di confidenza per p è:
$(\hat{p} - 1,645\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + 1,645\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$

Esercizio 3.

$Y \sim \Gamma(2, \beta)$
$f_Y(y) = \frac{\beta^2}{\Gamma(2)} y e^{-\beta y}$
$E(e^{tZ}) = E(e^{2t\beta Y}) = \int_0^{+\infty} \frac{\beta^2}{\Gamma(2)} y e^{-\beta y} e^{2t\beta Y} dy =$
$\frac{\beta^2}{(2\beta t - \beta)} \int_0^{+\infty} y(2\beta t - \beta) e^{y(2\beta t - \beta)} =$ risolvendo per parti otteniamo
$= \frac{\beta^2}{(2\beta t - \beta)^2} = \frac{1}{(1-2t)^2} \sim \chi^2_4$
$0,90 = P(q_1 \leq Z \leq q_2) = P(0,711 \leq 1\beta Y \leq 9,49) = P(\frac{0,711}{2Y} \leq \beta \leq \frac{9,49}{2Y})$

Esercizio 4.

$Pesosalmoni \sim N(\mu, 0,3^2)$
$0,95 = P(-z_{0,975} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{0,3/\sqrt{n}} \leq z_{0,975}) = P(\bar{X} - z_{0,975} 0,3/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{0,975} 0,3/\sqrt{n})$
Dalle tavole si ricava che $z_{0,975} = 1,96$. Allora per determinare n imponiamo la

seguente disequazione:
$\frac{1,96*0,3}{\sqrt{n}} \leq 0,1$ quindi ricaviamo che $n \geq 34,5744$.

Esercizio 5.
$X_1, ..., X_n$ un campione casuale da $N(\mu, 25)$.

1. $Q = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
   $0,9 = P(-q_1 \leq Q \leq q_1) = P(-q_1\sigma/\sqrt{n} \leq \bar{X} - \mu \leq q_1\sigma/\sqrt{n}) =$
   Dalle tavole si ricava che $q_1 = 1,645$ e quindi:
   $P(\bar{X} - 1,645 * 5/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1,645 * 5/\sqrt{n})$

2. $\bar{X} + 1,645 * 5/\sqrt{n} - \bar{X} + 1,645 * 5/\sqrt{n} < 1$ risolvendo si ottiene che $n > 270$.